

אלגברה

לינארית

$\alpha$	$\beta$	$\chi$	$\delta$
$\varepsilon$	$\phi$	$\varphi$	$\gamma$
$\eta$	$\iota$	$\kappa$	$\lambda$
$\mu$	$\nu$	$\omicron$	$\pi$
$\varpi$	$\theta$	$\vartheta$	$\rho$
$\sigma$	$\varsigma$	$\tau$	$\upsilon$
$\omega$	$\xi$	$\psi$	$\zeta$

גיא סלומון

## סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)  
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: [www.GooL.co.il/linearit.html](http://www.GooL.co.il/linearit.html)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



## תוכן

3	פרק 1- דטרמיננטות
10	פרק 2- ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון
11	פרק 3 - מטריצות והעתקות לינאריות

### פרק 1- דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4. \text{ חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{ב. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר  $n$ . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5) \quad a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{תרחא} \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

\* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי  $a=3, b=1, c=2$  ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר  $n=20$ .

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים:  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|A|=4, |B|=2$ . חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון:  $(PQ)^{-1} APQ = B$  הוכח:  $|A|=|B|$ .

ב. נתונים:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4,  $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .

חשב את  $|B|$ .

ג. נתונים:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3,  $B^2-2A^{-1}=0$ ,  $A+3B=0$ .

חשב את:  $|A|, |B|$ .

ד. הוכח: 1.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$  . 2.  $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$  .

ה. נתון כי  $A$  מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש-  $|A| = 0$  .

ו. נתונים:  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A| = 128$ ,  $2AB = B^T A^2$ , מצא את  $n$  .

ז. נתונים:  $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$ ,  $\det(A_{n \times n}) = 2$ . חשב:  $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$  .

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 & \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & & \\ 2x + 5y + 44z = 51 & & & & & \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} kx + y + z + t + r = 1 \\ x + ky + z + t + r = 1 \\ x + y + kz + t + r = 1 \\ x + y + z + kt + r = 1 \\ x + y + z + t + kr = 1 \end{array}$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח  $x = y = z = t = r$ .

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית  $adj(A)$  ובעזרתה את  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1)  $(adjA)_{1,5}$  (2)  $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם  $|A|=1$  וכל איברי  $A$  הם מספרים שלמים, אזי כל איברי  $A^{-1}$  הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- $A$  מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- $A^{-1}$  משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- $A$  הפיכה. הוכח שגם  $adj(A)$  וגם  $A^T$  הפיכות.

ד. נתון:  $A, B$  הפיכות.  $C, D$  לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: (1)  $C+D$  (2)  $A+B$  (3)  $AD$  (4)  $CD$  (5)  $AB$  ?

(16) מצא את ערכי  $k$  עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1.  $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$  2.  $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו:  $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$ .

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות:  $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$ .

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו:  $(1,2), (3,4), (5,8)$ .

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בטרמיננטות.



**תשובות:**

(1)  $ad - bc$  (1) (2) 29 (3) -1 (4) -1 (5) -3 (6) -14 (7) 24 (8) 234 (9) -300 (10) 9

(11) 6 (1) 0 (2) 0 (3) 3 (4) 24 (5) 44 (6) 104 (7) 120 (8) 114 (9) 6 (10) 3

(5) 1) -8 (2) 16 (3) 9 (4)  $n!$  (5)  $n!$  (6)  $(-1)^{n-1} n!$  (7)  $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$  (8)

(4)  $(a-b)^{n-1} [a+(n-1)b]$  (5) 1 (6)  $2 \cdot 3^{n-2}$

(7)  $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$ ,  $D_2 = a^2 - bc$ ,  $D_3 = a^3 - 2abc$  א

ב. 1)  $D_n = 2^{n+1} - 1$  (2)  $D_{20} = 2^{21} - 1$  (3) 0 (4)  $2^{13}$  (5) 4 (6) 1 (7) 9 (8) 0 (9) 4 (10)  $2^{11}$

(10) ב.  $81/32$  ג.  $|A|=18, |B|=-2/3$  ד.  $4^n$  ה.  $x=1, y=2$  (11) 1

(2)  $x=1, y=1, z=2$  (3)  $x=y=z=t=1$  (4) א.  $k \neq 1, k \neq -4$  ב.  $k = -2$  (12)

ג. לא

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (13)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad adj(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(14) 1) 240 (2) 0.5 (3) 1 (4) לא (5) כן (6)  $k=0$  (15) 1) לא (2) לא (3) לא (4) לא (5) כן (16)

(17) א. 1 (2) 13 (3) א. 2 (4) 14 (5) ב. 22 (6) ג.  $3x - y + 4z + 2 = 0$  (7) ד. 2

## פרק 2- ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות :

- א. מצא מטריצה אופיינית.
- ב. מצא פולינום אופייני.
- ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצא וקטורים עצמיים.
- ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה  $P$  כך ש-  $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב  $A^{2009}$ .
- ט. מצא את הפולינום המינימלי.
- י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו-  $I$  בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

\* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל  $C$  ופעם מעל  $R$ .

- (2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.  
 ב. ידוע ש-  $A$  ו-  $B$  מטריצות דומות. הוכח כי:  
 1.  $|A| = |B|$  . 2.  $tr(A) = tr(B)$  . 3. ל-  $A$  ו-  $B$  אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם  $P^{-1}AP = B$  או  $A^n = PB^nP^{-1}$ .

### פרק 3 - מטריצות והעתקות לינאריות

**הערה:** כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (פרק 4). לפיכך חמשת הסעיפים הראשונים בשאלה הראשונה עוסקים בכך.

#### מטריצה שמייצגת העתקה

(1) נתונים שני בסיסים של  $R^3$  :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

- א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ . סמן וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .
- ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ . סמן וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .
- ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ . סמן מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .
- ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס  $B_2$  לבסיס  $B_1$ . סמן מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .
- ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \quad (3) \quad [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \quad (2) \quad [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \quad (1)$$

נתונה העתקה לינארית:  $T: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$

- ו. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B_1$ . סמן מטריצה זו ב-  $[T]_{B_1}$ .
- ז. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B_2$ . סמן מטריצה זו ב-  $[T]_{B_2}$ .
- ח. אשר את הטענות הבאות :

$$[T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2} \quad (2) \quad [T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1} \quad (1)$$

$$[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2} \quad (3)$$

ט. האם ההעתקה הפיכה ?

י. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

יא. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

יב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון ?

(2) יהיו  $B_1$  ו- $B_2$  שני בסיסים של המרחב  $R^3$ . יהי  $T$  אופרטור לינארי על  $R^3$ .

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix} \text{ ו- } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ נתון כי:}$$

חשב את  $[M]_{B_2}^{B_1}$  ואת  $[T]_{B_2}$ .

(3) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה  $T : M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ ,  $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$ ,

$$. B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ לפי הבסיס:}$$

(4) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה  $D : P_4[R] \rightarrow P_3[R]$ ,  $D(p(x)) = p'(x)$ ,

לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

### מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

(5) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות ביחס לבסיסים

הסטנדרטיים של  $R^n$ .

$$\text{א. } T(x, y) = (x + y, y + z, z - x), T : R^2 \rightarrow R^3$$

$$\text{ב. } T(x, y, z, t) = (4x - y - z + t, x + y + 4z + t), T : R^4 \rightarrow R^2$$

(6) תהי  $T : R^3 \rightarrow R^2$  העתקה לינארית המוגדרת על ידי  $T(x, y, z) = (4x + y - z, x - y + z)$ .

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה  $T$  מהבסיס  $B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$\text{של } R^3 \text{ לבסיס } B_2 = \{(1, 4), (1, 5)\} \text{ של } R^2 \text{ כלומר את } [T]_{B_1}^{B_2}.$$